

Задача 3

Задача 1

Найти все равновесия по максимальному динамическому уровню:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$F' = \max_{1 \leq i \leq 5} W'(i)$$

$$W'(i) = \max_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$$Y(i) = \text{Argmax}_{1 \leq j \leq 6} b_{ij}$$

$$\begin{cases} Y(1) = \{3, 5\} \leftarrow b_{13}, b_{15} = 3 \\ Y(2) = \{2, 5\} \leftarrow b_{22}, b_{25} = 3 \\ Y(3) = \{3, 6\} \leftarrow b_{33}, b_{36} = 2 \\ Y(4) = \{1, 3, 5\} \leftarrow b_{41}, b_{43}, b_{45} = 2 \\ Y(5) = \{6\} \leftarrow b_{56} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} W'(1) = \max \{a_{13}, a_{15}\} = 4 \\ W'(2) = \max \{a_{22}, a_{25}\} = 3 \\ W'(3) = \max \{a_{33}, a_{36}\} = 2 \\ W'(4) = \max \{a_{41}, a_{43}, a_{45}\} = 4 \\ W'(5) = a_{56} = 4 \end{cases}$$

$$F' = \max_{1 \leq i \leq 5} W'(i) = 4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ равнов. по нм. : $(i^0, j^0) = (1, 3)$
 $(4, 3)$
 $(4, 5)$
 $(5, 6)$

Вариант 3

Задача 2

Найдите решение в смешанных стратегиях матричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{5} & \cancel{3} & 5 & 3 \\ \cancel{5} & \cancel{4} & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Строка доп-ется ..., то ее можно вычерк.
Столбец доп-ет ..., то его можно вычерк.

- 1) 1 стр. $\leq$ 2 стр. $\Rightarrow$ вычерк. 1 стр.
- 2) [расм. оставшуюся матрицу, нумерацию строк / столбцов сохраним для удобства]:
- * 3 столб. $\geq$ 4 столб. $\Rightarrow$ вычерк. 3 столбца
- 3) [...] 4 столб. $\geq$ 2 столб. $\Rightarrow$ вычерк. 4 столбца
- 4) [...] 2 стр. $\leq \frac{1}{2}(3 \text{ стр.}) + \frac{1}{2}(4 \text{ стр.}) \Rightarrow$ вычерк. 2 строку
(5, 4) (5, 5, 4, 5)

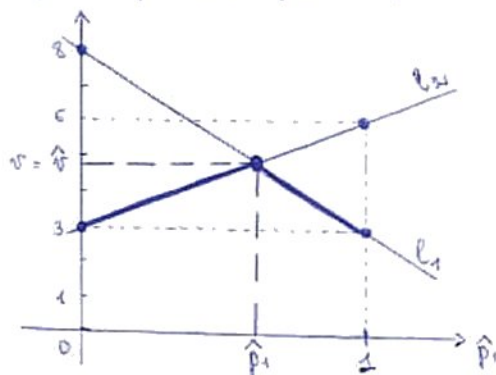
Теперь рассматриваем матрицу:

$$\hat{A} = \hat{p}_1 \begin{pmatrix} \hat{a}_{12} & \hat{a}_{14} \\ \hat{a}_{22} & \hat{a}_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Постр. прямые $l_j(\hat{p}_1) = \hat{a}_{1j} \cdot \hat{p}_1 + \hat{a}_{2j}(1 - \hat{p}_1)$:

$$l_1(\hat{p}_1) = 3 \cdot \hat{p}_1 + 8(1 - \hat{p}_1) = -5\hat{p}_1 + 8$$

$$l_2(\hat{p}_1) = 6\hat{p}_1 + 3(1 - \hat{p}_1) = 3\hat{p}_1 + 3$$



Строим итер. таблицу.

Находим ее максимум:

$$-5\hat{p}_1 + 8 = 3\hat{p}_1 + 3 \Rightarrow 8\hat{p}_1 = 5 \Rightarrow \hat{p}_1 = \frac{5}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{p}^0} = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)$$

Найдем $\hat{q}^0$:

$$k_{j1} \cdot \hat{q}^* + k_{j2} \cdot (1 - \hat{q}^*) = 0$$

$$\hat{p}_1^0 = l_1 \cap l_2 \Rightarrow \begin{cases} j_1 = 1 \Rightarrow k_{j_1} = -5 \\ j_2 = 2 \Rightarrow k_{j_2} = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5\hat{q}^* + 3(1 - \hat{q}^*) = 0 \Rightarrow -8\hat{q}^* + 3 = 0 \Rightarrow \hat{q}^* = \frac{3}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{q}^0} = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$$

$$\text{Тогда, } \underline{p^0} = (0, 0, \hat{p}_1^0, \hat{p}_2^0) = \left(0, 0, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right),$$

$$\underline{q^0} = (\hat{q}_1^0, \hat{q}_2^0, 0, 0) = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, 0, 0\right),$$

$$v = l_2\left(\frac{5}{8}\right) = 3 \cdot \frac{5}{8} + 3 = \frac{15}{8} + 3 = 1\frac{7}{8} + 3 = 4\frac{7}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v = 4\frac{7}{8}}$$

Вариант 3

Задача 3

Используя соображения доминирования, найдите ситуации равновесия в смешанных стратегиях матричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 5 & 6 \\ 5 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Если в A строка (столбец) доминируется..., то ее можно вычеркнуть.

Если в B столбец (строка) доминируется..., то его можно вычеркнуть.

- 1) в B: 4 столб. $\leq$ 1 столб. $\Rightarrow$ вычерк. 4 столбцы и в A,
2) в A: 4 стр. $\leq$ 3 стр. $\Rightarrow$ вычерк. 4 строки и в A, и в B.
3) в B: 1 столб. $\leq$ 3 столб. $\Rightarrow$ вычерк. 1 столбец и в A, и в B.

Теперь расем. такие матрицы:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

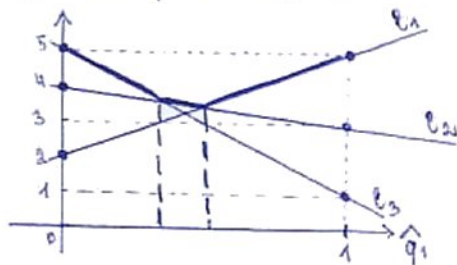
$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

постр. кривые $l_i(\hat{q}_1) = \hat{a}_{i1} \cdot \hat{q}_1 + \hat{a}_{i2} (1 - \hat{q}_1)$:

$$l_1(\hat{q}_1) = 5\hat{q}_1 + 2(1 - \hat{q}_1) = 3\hat{q}_1 + 2$$

$$l_2(\hat{q}_1) = 3\hat{q}_1 + 4(1 - \hat{q}_1) = -\hat{q}_1 + 4$$

$$l_3(\hat{q}_1) = \hat{q}_1 + 5(1 - \hat{q}_1) = -4\hat{q}_1 + 5$$



Расем. верхн. огибающую и точки узла

$$\hat{p}_1^0 = \underline{l_2 \cap l_3} :$$

$$-\hat{q}_1 + 4 = -4\hat{q}_1 + 5 \Rightarrow 3\hat{q}_1 = 1 \Rightarrow \hat{q}_1^0 = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{q}^0} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\hat{p}^0 = (0, \hat{p}^*, 1 - \hat{p}^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{p}^* \cdot b_{21} + (1 - \hat{p}^*) \cdot b_{31} = v_2 \\ \hat{p}^* \cdot b_{22} + (1 - \hat{p}^*) \cdot b_{32} = v_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\hat{p}^* + 8(1 - \hat{p}^*) = 3\hat{p}^* + 2(1 - \hat{p}^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\hat{p}^* + 8 = \hat{p}^* + 2 \Rightarrow 4\hat{p}^* = 6 \Rightarrow \hat{p}^* = \frac{6}{4} > 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ma marea se potregum

$$\hat{p}_1^0 = \underline{l_1 \cap l_2} :$$

$$3\hat{q}_1 + 2 = -\hat{q}_1 + 4 \Rightarrow 4\hat{q}_1 = 2 \Rightarrow \hat{q}_1^0 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{q}^0} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\hat{p}^0 = (\hat{p}^*, 1 - \hat{p}^*, 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\hat{p}^* + 5(1 - \hat{p}^*) = 6\hat{p}^* + 3(1 - \hat{p}^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\hat{p}^* + 5 = 3\hat{p}^* + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\hat{p}^* = 2 \Rightarrow \hat{p}^* = \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{p}^0} = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$$

$$\text{Terza, } \underline{\hat{p}^0} = (\hat{p}_1^0, \hat{p}_2^0, \hat{p}_3^0, 0) = \underline{\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0\right)},$$

$$\underline{\hat{q}^0} = (0, \hat{q}_1^0, \hat{q}_2^0, 0) = \underline{\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)},$$

$$v = l_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + 2 = 3\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v = 3\frac{1}{2}}$$

Вариант 4

Задача 1

Найдите нижнее и верхнее значение игры, все максимальные и минимаксные стратегии, а также все седловые точки (если $\exists$) матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 7 & 4 & 7 & 9 & 6 & 8 & 1 \\ 1 & 8 & 5 & 1 & 9 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 6 & 7 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W(i) = \min_{1 \leq j \leq 7} a_{ij} \Rightarrow W(i) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v} = \max_{1 \leq i \leq 5} W(i) = \underline{1} - \text{нижн. значение игры} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X^0 = \{2, 3\} \Rightarrow \begin{matrix} \uparrow \\ \text{не гоестим.} \\ \max W(i) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x^0 = 2 \\ x^0 = 3 \end{matrix} - \text{максим. стратегии}$$

$$M(j) = \max_{1 \leq i \leq 5} a_{ij} \Rightarrow M(j) = (7 \ 8 \ 9 \ 9 \ 9 \ 8 \ 3)$$

$$\bar{v} = \min_{1 \leq j \leq 7} M(j) = \bar{3} - \text{верхн. значение игры} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y^0 = \{4\} \Rightarrow \underline{y^0 = 4} - \text{минимаксн. стратегии}$$

$$\underline{v} = 1 < 3 = \bar{v} \Rightarrow \text{нет седловых точек}$$

Вариант 4

Задача 2

Найдите все стационарные равновесия игры на игре-выбывании:

$$F(x, y) = -2x^2 - 2xy + y^2 - x - 2y$$

$$G(x, y) = x^2 - 4xy - y^2 - x - y$$

$$X = [-1, 2], \quad Y = [-1, 1]$$

$$\left. \begin{aligned} F'_x &= -4x - 2y - 1 \Rightarrow F''_{xx} = -4 < 0 \Rightarrow F - \text{строго вогн. по } x \\ G'_y &= -4x - 2y - 1 \Rightarrow G''_{yy} = -2 < 0 \Rightarrow G - \text{строго вогн. по } y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists \text{ c.p.}$$

F, G - строго вогн. $\Rightarrow$ им-ба наим. отбегов для каждого игрока соот. из эквн. отбегов

$$\begin{cases} x(y): \max_{-1 \leq x \leq 2} F(x, y) = F(x(y), y) \\ y(x): \max_{-1 \leq y \leq 1} G(x, y) = G(x, y(x)) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(y) = x \\ y(x) = y \end{cases} \Rightarrow (x^0, y^0) - \text{c.p.}$$

Построим $x(y)$:

$F(x, y)$ - вогн. по $x \Rightarrow$

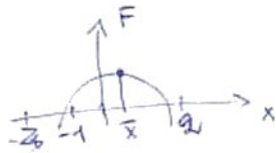
$$\Rightarrow F'_x = -4x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow \bar{x} = -\frac{2y+1}{4}$$

$$\bar{x} \in [-1, 2] \Rightarrow -1 \leq -\frac{2y+1}{4} \leq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8 \leq 2y+1 \leq 4 \Rightarrow -9 \leq 2y \leq 3 \Rightarrow -4.5 \leq y \leq 1.5$$

$y \in [-1, 1] \Rightarrow$ ф-ме наим. отбегов 1-го игрока:

$$\boxed{x(y)} = -\frac{2y+1}{4}$$



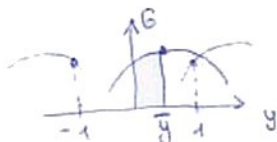
Построим $y(x)$:

$G(x, y)$ - вогн. по $y \Rightarrow$

$$\Rightarrow G'_y = -4x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow \bar{y} = -\frac{4x+1}{2}$$

$$\bar{y} \in [-1, 1] \Rightarrow -1 \leq -\frac{4x+1}{2} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \leq 4x+1 \leq 2 \Rightarrow -3 \leq 4x \leq 1 \Rightarrow -\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}$$



Вариант 4Задача 3

Решите игру Γ_2 где симметричной игрой Γ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$G_2 = \max_{1 \leq j \leq 5} \min_{1 \leq i \leq 5} b_{ij}$$

$$\min_{1 \leq i \leq 5} b_{ij} = (1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1) \Rightarrow G_2 = 1 \Rightarrow E = \{1, 3, 4, 5\}$$

$D = \{(i, j) \mid b_{ij} > G_2 = 1\} \rightarrow$ см. в м. В - см-во D обведено
обведено в А см-во, соотв. $(i, j) \in D$

$$K = \max_{(i, j) \in D} a_{ij} = 8$$

$$M_j = \min_{j \in E} \max_{1 \leq i \leq 5} a_{ij} = \min \{5, 5, 6, 8\} = 5$$

$$M = 5 < 8 = K$$

Нам. парам. выигрыш той игрока:

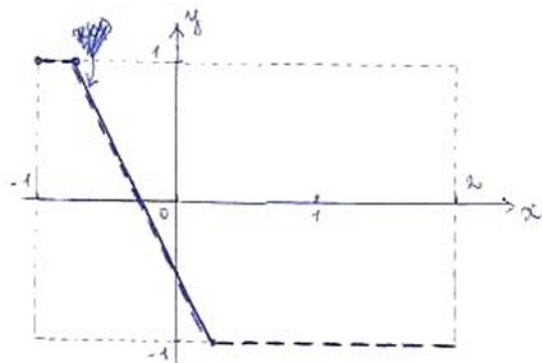
$$F_2 = \max [K, M] = 8$$

$\exists j \in F_2$ реализу. в a_{45}

$$f^2(j) = \begin{cases} 4, & \text{если } j=5 \\ 4, & \text{если } j=1 \\ 2, & \text{если } j=2 \\ 2, & \text{если } j=3 \\ 5, & \text{если } j=4 \end{cases} \leftarrow \begin{cases} \text{номер } i \\ \text{номер. эл-та} \\ \text{в соотв. строке} \\ \text{матрицы } B \end{cases}$$

$\Rightarrow$ φ -ые иам. ответы 2-ю широк:

$$\underline{y(x)} = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [-1, -\frac{3}{4}) \\ -\frac{4x+1}{2}, & \text{если } x \in [-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}] \\ -1, & \text{если } x \in (\frac{1}{4}, 2] \end{cases}$$



— - $x(y)$
 --- - $y(x)$

$$\begin{cases} x(y) = x \\ y(x) = y \end{cases} \Rightarrow x^0 = -\frac{2y+1}{4}$$

с.р.: (x^0, y^0) , где $x^0 = -\frac{2y+1}{4}$
 $y^0 \in [-1, 1]$

с.р.: $\begin{cases} y^0 = t \\ x^0 = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \\ t \in [-1, 1] \end{cases}$

Вариант 14

Задача 1

Найдите наилучший гарантированный результат F_1 и все оптимальные стратегии 1-го игрока иерархической игры Γ , где матричной игрой Γ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \max_{1 \leq i \leq 5} \min_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$$Y(i) = \text{Arg} \max_{1 \leq j \leq 6} b_{ij}$$

$$W(i) = \min_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$$\begin{cases} Y(1) = \{2, 5, 6\} \leftarrow b_{12}, b_{15}, b_{16} = 3 \\ Y(2) = \{5\} \leftarrow b_{25} = 4 \\ Y(3) = \{1, 2\} \leftarrow b_{31}, b_{32} = 4 \\ Y(4) = \{2, 4\} \leftarrow b_{42}, b_{44} = 4 \\ Y(5) = \{3, 4\} \leftarrow b_{53}, b_{54} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} W(1) = \min \{ \underset{\text{"1"}}{a_{12}}, \underset{\text{"3"}}{a_{15}}, \underset{\text{"3"}}{a_{16}} \} = 1 \\ W(2) = a_{25} = 2 \\ W(3) = \min \{ \underset{\text{"3"}}{a_{31}}, \underset{\text{"0"}}{a_{32}} \} = 0 \\ W(4) = \min \{ \underset{\text{"3"}}{a_{42}}, \underset{\text{"0"}}{a_{44}} \} = 0 \\ W(5) = \min \{ \underset{\text{"4"}}{a_{53}}, \underset{\text{"2"}}{a_{54}} \} = 2 \end{cases}$$

$$\sqrt{F_1 = \max_{1 \leq i \leq 5} W(i) = 2 \Rightarrow \begin{matrix} i^0 = 2, \\ i^0 = 5, \end{matrix} \begin{matrix} > \text{оптим.} \\ > \text{стратегии} \end{matrix}}$$

$F_1 = 2$ - наилуч. гарант. результат

Вариант 14

Задача 2

Найдите решение в смешанных стратегиях матричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 8 \\ 6 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Строка доминирует над выигр. или проигр. коид. $\Rightarrow$ ее можно вычеркнуть.
Столбец доминирует над выигр. или проигр. коид. $\Rightarrow$ ее можно вычеркнуть.

- 1) 4 стр. $<$ 1 стр. $\Rightarrow$ вычерк. 4 строку
- 2) [рассм. оставш. матрицу, нумерацию сохр.]
4 столб. $\geq$ 3 столб. $\Rightarrow$ вычерк. 4 столбец
- 3) [...] 3 стр. $\leq$ 2 стр. $\Rightarrow$ вычерк. 3 строку

Теперь рассм. матрицу:

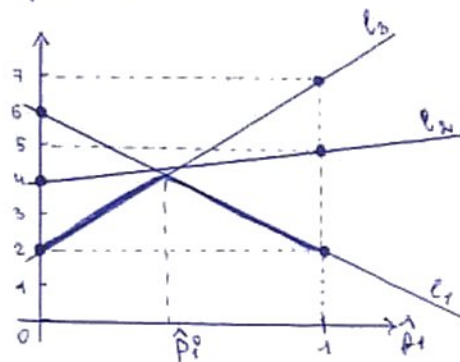
$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Рассм. функции $l_j(\hat{p}_1) = \hat{a}_{1j} \cdot \hat{p}_1 + \hat{a}_{2j} \cdot (1 - \hat{p}_1)$:

$$l_1(\hat{p}_1) = 2\hat{p}_1 + 6(1 - \hat{p}_1) = -4\hat{p}_1 + 6$$

$$l_2(\hat{p}_1) = 5\hat{p}_1 + 4(1 - \hat{p}_1) = \hat{p}_1 + 4$$

$$l_3(\hat{p}_1) = 4\hat{p}_1 + 2(1 - \hat{p}_1) = 5\hat{p}_1 + 2$$



$$l_1 \cap l_3: -4\hat{p}_1 + 6 = 5\hat{p}_1 + 2 \Rightarrow 9\hat{p}_1 = 4 \Rightarrow \hat{p}_1 = \frac{4}{9}$$

$$l_2(\frac{4}{9}) = \frac{4}{9} + 4 = 4\frac{4}{9} \quad (\text{т.е. } l_2 \text{ имеет } l_1 \cap l_3)$$

$$l_1(\frac{4}{9}) = 6 - \frac{16}{9} = \frac{38}{9} = 4\frac{2}{9}$$

Сформулируем задачу.

Найдем ее max:

$$\hat{p}_1^0 = l_1 \cap l_3 \Rightarrow \hat{p}_1^0 = \frac{4}{9} \Rightarrow \hat{p}^0 = (\frac{4}{9}, \frac{5}{9})$$

Найдем $\hat{q}^0$:

$$K_{j1}\hat{q}^* + K_{j2}(1-\hat{q}^*) = 0$$

$$\hat{p}_1^0 = l_1 \cap l_3 \Rightarrow \begin{cases} j_1 = 1 \Rightarrow K_{j1} = -4 \\ j_2 = 3 \Rightarrow K_{j2} = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4\hat{q}^* + 5(1-\hat{q}^*) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9\hat{q}^* + 5 = 0 \Rightarrow \hat{q}^* = \frac{5}{9} \Rightarrow \hat{q}^0 = (\frac{5}{9}, 0, \frac{4}{9})$$

$$\text{Тогда: } [p^0] = (\hat{p}_1^0, \hat{p}_2^0, 0, 0) = (\frac{4}{9}, \frac{5}{9}, 0, 0)$$

$$[q^0] = (\hat{q}_1^0, \hat{q}_2^0, \hat{q}_3^0, 0) = (\frac{5}{9}, 0, \frac{4}{9}, 0)$$

$$v = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 p_i^0 a_{ij} q_j^0 = \sum_{i=1}^4 (p_i^0 a_{i1} \cdot \frac{5}{9} + p_i^0 a_{i3} \cdot \frac{4}{9}) =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot a_{11} + \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot a_{13} + \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot a_{21} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot a_{23} =$$

$$= \frac{20}{81} \cdot 2 + \frac{16}{81} \cdot 4 + \frac{25}{81} \cdot 6 + \frac{20}{81} \cdot 2 = \frac{80+112+150}{81} = \frac{342}{81} = \boxed{\frac{38}{9}}$$

Вариант 14

Задача 3

Найдите минимакс и минимаксную стратегию игрока на прямоугольнике:

$$F(x, y) = -3x^2 + 3xy - 3y^2 - x + y, \quad X = [-1, 1], \quad Y = [-1, 1]$$

$$\bar{v} = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y)$$

$y^0 \in Y$ - минимакс. стратегия, если $\sup_{x \in X} F(x, y^0) = \bar{v}$

$$M(y) = \sup_{x \in X} F(x, y) = F(x(y), y)$$

Найдем $M(y)$:

$$M(y) = \max_{-1 \leq x \leq 1} F(x, y) = F(x(y), y)$$

$$F(x, y) = -3x^2 + x(3y - 1) + (-3y^2 + y)$$

Вершина этой параболы:

$$x = \frac{3y - 1}{6} = \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}$$

$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{3y - 1}{6} \leq 1 \Rightarrow -6 \leq 3y - 1 \leq 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5 \leq 3y \leq 7 \Rightarrow -\frac{5}{3} \leq y \leq \frac{7}{3} \Rightarrow$$

т.е. $y \in Y = [-1, 1] \Rightarrow$ максимум достигн. при $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}$

$$M(y) = F\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{6}, y\right) =$$

$$= -3 \cdot \frac{(3y - 1)^2}{36} + 3 \cdot \frac{3y - 1}{6} y - 3y^2 - \frac{3y - 1}{6} + y =$$

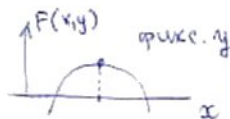
$$= -\frac{1}{12} \cdot (3y - 1)^2 + \frac{1}{6}(3y - 1) \cdot (3y - 1) - y(3y - 1) =$$

$$= \frac{(3y - 1)}{12} (-3y + 1 + 6y - 2 - 12y) =$$

$$= \frac{3y - 1}{12} \cdot (-3y - 1) = \frac{1}{12} (-24y^2 + 6y + 1) = -\frac{9}{4}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{12}$$

$$M(y) = -\frac{9}{4}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{12} \quad \text{— это парабола}$$

значит, минимум достигается при $y = -1$, или $y = 1$



$$\begin{aligned}\bar{v} &= \min \{M(-1), M(1)\} = \\ &= \min \left\{ -\frac{9^{15}}{4} - \frac{1^{16}}{2} + \frac{1}{12}, -\frac{9^{13}}{4} + \frac{1^{16}}{2} + \frac{1}{12} \right\} = \\ &= \min \left\{ \frac{-27-6+1}{12}, \frac{-27+6+1}{12} \right\} = \min \left\{ -\frac{32}{12}, -\frac{20}{12} \right\} = -\frac{32}{12} = -\frac{8}{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{v} = -\frac{8}{3}} \quad - \text{ минимакс}$$

$$\boxed{v^0 = -1} \quad - \text{ минимакс. стратегия}$$

Вариант 15Задача 1

Найдите все равновесие по Штакельбергу ду-матричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Равнов. по Шт. :

$$(i^0, j^0) : W'(i^0) = \max_{1 \leq i \leq 5} W'(i) = F'$$

$$W'(i) = \max_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$$Y(i) = \text{Arg max}_{1 \leq j \leq 6} b_{ij}$$

$$Y(1) = \{3\} \leftarrow b_{13}$$

$$Y(2) = \{4, 6\} \leftarrow b_{24}, b_{26}$$

$$Y(3) = \{1, 4\} \leftarrow b_{31}, b_{34}$$

$$Y(4) = \{3\} \leftarrow b_{43}$$

$$Y(5) = \{2, 3, 6\} \leftarrow b_{52}, b_{53}, b_{56}$$

$$W'(1) = a_{13} = 1$$

$$W'(2) = \max \{ \underset{0}{a_{24}}, \underset{2}{a_{26}} \} = 2$$

$$W'(3) = \max \{ \underset{1}{a_{31}}, \underset{1}{a_{34}} \} = 1$$

$$W'(4) = a_{43} = 0$$

$$W'(5) = \max \{ \underset{3}{a_{52}}, \underset{4}{a_{53}}, \underset{2}{a_{56}} \} = 4$$

$$\Downarrow W'(i^0) = \max \{ 1, 2, 1, 0, 4 \} = 4$$

Равнов. по Шт. : $(i^0, j^0) = (5, 3)$

Вариант 15

Задача 2

Найдите решение в смешанных стратегиях матричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ 8 & 2 & 4 & 9 \\ 5 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

a дом-ет b , если $a_i \geq b_i$

строка дом-ет се ... $\Rightarrow$ ее можно вычеркнуть

столбец дом-ет се ... $\Rightarrow$ его можно вычеркнуть

1) 4 строка дом-ет ($\leq$) 1 строкой $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 4 строку вычерк.

2) [рассм. оставшуюся матрицу, для удобства ескери- или нумерацию]

4 столбец дом-ет ($\geq$) 2 столбец $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ вычерк. 4 столб.

3) [...] 1 столбец дом-ет ($\geq$) 2 столбец $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ вычерк. 1 столбец

4) [...] 1 строка дом-ет ($\leq$) $\frac{1}{2}$ (2 стр) + $\frac{1}{2}$ (3 стр) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1 строку вычерк.

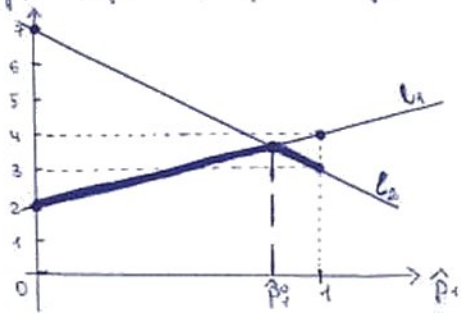
Теперь рассм. оставшуюся матрицу:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Рассм. прямые $\ell_j(\hat{p}_1) = \hat{a}_{1j} \cdot \hat{p}_1 + \hat{a}_{2j} \cdot (1 - \hat{p}_1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ell_1(\hat{p}_1) = 4\hat{p}_1 + 2(1 - \hat{p}_1) = 2\hat{p}_1 + 2$$

$$\ell_2(\hat{p}_1) = 3\hat{p}_1 + 4(1 - \hat{p}_1) = -\hat{p}_1 + 4$$



Строим оптимальное ожидающее (—)

Находим ее точку max:

$$2\hat{p}_1 + 2 = -4\hat{p}_1 + 4 \Rightarrow 6\hat{p}_1 = 5 \Rightarrow \hat{p}_1 = \frac{5}{6} \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{p}^0 = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right) \leftarrow \text{это где и } \hat{A}$$

Находим $\hat{q}^0$:

$$K_{j1}\hat{q}^* + K_{j2}(1-\hat{q}^*) = 0$$

$$\hat{p}_1^0 = l_1 \cap l_2 \Rightarrow \begin{cases} j_1 = 1 \Rightarrow K_{j1} = 2 \\ j_2 = 2 \Rightarrow K_{j2} = -4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\hat{q}^* - 4(1-\hat{q}^*) = 0 \Rightarrow 6\hat{q}^* = 4 \Rightarrow \hat{q}^* = \frac{2}{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{q}^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \leftarrow \text{это где и } \hat{A}$$

Тогда: $\boxed{p^0} = (0, \hat{p}_1^0, \hat{p}_2^0, 0) = \left(0, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0\right)$

$$\boxed{q^0} = (0, \hat{q}_1^0, \hat{q}_2^0, 0) = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$$

$$v = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 p_i^0 a_{ij} q_j^0 = \sum_{i=1}^4 \left(p_i^0 a_{i2} \cdot \frac{2}{3} + p_i^0 a_{i3} \cdot \frac{1}{3} \right) = \\ = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot a_{22} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot a_{23} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot a_{32} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot a_{33} = \\ = \frac{5}{9} \cdot 4 + \frac{5}{18} \cdot 3 + \frac{1}{9} \cdot 2 + \frac{1}{18} \cdot 4 = \frac{40+15+4+4}{18} = \frac{66}{18} = \frac{11}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{11}{3}}$$

Вариант 15

Задача 3

Используя соображения доминирования, найдите ситуации равновесия в смешанных стратегиях симметричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Если в A строка строка доминируется ($<$) вып. или. коид. стр., то она входит с 0 вер. в смеш. страт. игрока.

Если в B столбец ... то игрок

- 1) в A: 4 стр. $< \frac{1}{2} (2 \text{ стр.} + 3 \text{ стр.}) \Rightarrow$ вычерк. 4 строку
 $0 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \quad 1.5 \quad 3.5 \quad 5.5 \quad 6.5$ (и в A, и в B)
- 2) [Теперь рассм. оставшиеся матрицы, где удобства нумерацию сохраним]
в B: 4 столб. $\leq$ 1 столб. $\Rightarrow$ 4 столб. вычерк. (и в A, и в B)
(можно потыкать с.р. ...)
- 3) [...] в B: 3 столб. $\leq$ 2 столб. $\Rightarrow$ вычерк. 3 столб. (и в A, и в B)
(...)

Теперь рассм. матрицы:

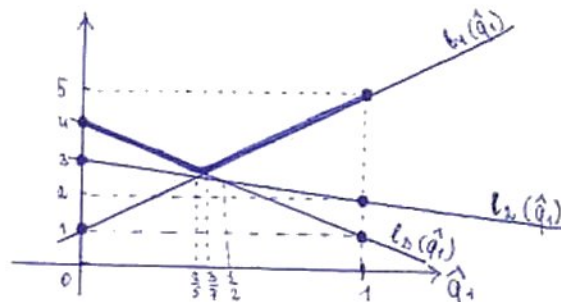
$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Постр. см-во кривых $l_i(\hat{q}_1) = \hat{a}_{i1} \cdot \hat{q}_1 + \hat{a}_{i2} (1 - \hat{q}_1)$:

$$l_1(\hat{q}_1) = 5\hat{q}_1 + 1 - \hat{q}_1 = 4\hat{q}_1 + 1$$

$$l_2(\hat{q}_1) = 2\hat{q}_1 + 3(1 - \hat{q}_1) = -\hat{q}_1 + 3$$

$$l_3(\hat{q}_1) = \hat{q}_1 + 4(1 - \hat{q}_1) = -3\hat{q}_1 + 4$$



$$l_1 \cap l_2: 4\hat{q}_1 + 1 = -\hat{q}_1 + 3 \Rightarrow 5\hat{q}_1 = 2 \Rightarrow \hat{q}_1 = \frac{2}{5} \Rightarrow l = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$$

$$l_1 \cap l_3: 4\hat{q}_1 + 1 = -3\hat{q}_1 + 4 \Rightarrow 7\hat{q}_1 = 3 \Rightarrow \hat{q}_1 = \frac{3}{7} \Rightarrow l = \frac{19}{7} = 2\frac{5}{7}$$

$$l_2 \cap l_3: -\hat{q}_1 + 3 = -3\hat{q}_1 + 4 \Rightarrow 2\hat{q}_1 = 1 \Rightarrow \hat{q}_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow l = 2\frac{1}{2}$$

Ищем верш. отдающую (l_2 и l_3). Рассмотрим точку излома

$$l_1 \cap l_3: \hat{q}_1^0 = \frac{3}{7} \Rightarrow \hat{q}^0 = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7} \right)$$

$$\hat{p}^0 = (\hat{p}^*, 0, 1 - \hat{p}^*) \quad \leftarrow (\text{т.к. } l_2 \cap l_3)$$

$$\begin{cases} \hat{p}^* v_{11} + (1 - \hat{p}^*) v_{31} = v_2 \\ \hat{p}^* v_{12} + (1 - \hat{p}^*) v_{32} = v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 2\hat{p}^* + 4(1 - \hat{p}^*) &= 6\hat{p}^* + 1 - \hat{p}^* \Rightarrow \\ \Rightarrow -2\hat{p}^* + 4 &= 5\hat{p}^* + 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4\hat{p}^* &= 3 \Rightarrow \hat{p}^* = \frac{3}{7} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{p}^0 = \left(\frac{3}{7}, 0, \frac{4}{7} \right)$$

Тогда, ситуация равновесия исх. игры:

$$\boxed{p^0} = (\hat{p}_1^0, \hat{p}_2^0, \hat{p}_3^0, 0) = \left(\frac{3}{7}, 0, \frac{4}{7}, 0 \right)$$

$$\boxed{q^0} = (\hat{q}_1^0, \hat{q}_2^0, 0, 0) = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0, 0 \right)$$

Вариант 14Задача 1

Найдите все ситуации равновесия в чистых стратегиях биматричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Построим м-во наших ответов:

1) для 1-ого игрока: $X(j)$ - м-во номеров max эл-тов в j-ой строке A (обвед. кружочками)

$$X(1) = \{2, 4\}$$

$$X(2) = \{3, 4\}$$

$$X(3) = \{2, 3, 4\}$$

$$X(4) = \{2\}$$

$$X(5) = \{1, 4\}$$

$$X(6) = \{1\}$$

2) для 2-ого игрока: $Y(i)$ - м-во номеров max эл-тов в i-ой строке B.

$$Y(1) = \{1, 2, 3\}$$

$$Y(2) = \{3\}$$

$$Y(3) = \{1\}$$

$$Y(4) = \{3, 5\}$$

$$Y(5) = \{1, 6\}$$

Сит. равнов. - $(i^0, j^0) : i^0 \in X(j^0)$
 $j^0 \in Y(i^0)$

Значит, смотрим „общие кружочки“:

$$\begin{aligned} (i^0, j^0) &= (2, 3) \leftarrow \text{ситуации} \\ &= (4, 3) \leftarrow \text{равновесия} \\ &= (4, 5) \leftarrow \end{aligned}$$

Вариант 14Задача 2

Найдите значение игры v и все оптимальные стратегии игроков в следующей игре с полной информацией: сначала 2-ой игрок выбирает номер "b" из-за столбцов N_b , $b=1, 2$ матрицы A , где $N_1 = \{1, 4\}$, $N_2 = \{2, 3\}$. Затем 1-ый игрок, зная выбор "b" второго, выбирает номер i строки из A , а потом 2-ой игрок, зная предыдущие выборы "b" и i , выбирает номер j столбца в из-за N_b . Выигрыш 1-го игрока определяется по матрице:

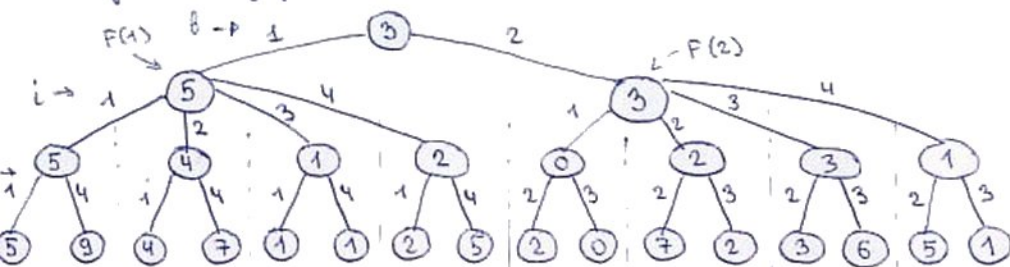
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 9 \\ 4 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1) 2 игрок: 1 или 2

2) 1 игрок: 1, 2, 3 или 4

3) 2 игрок: если выбрал $b=1$ 1, то 1 или 4
если выбрал $b=1$ 2, то 2 или 3

Построим дерево:



Дерево строим по алгоритму (см. начало) из 3-х шагов.

В листьях вписываем значения, соотв. a_{ij} :

- последн. "этап" соотв. j
- предпоследн. "этап" соотв. i

$$F(b, i, j) = a_{ij}$$

В условии не сказано, но будем считать, что:

- 1-ый игрок максимизирует
- 2-ой игрок минимизирует

$F(b, i) = \min_{j \in N_b} a_{ij}$ - т.е. запоминаем предпоследний уровень вершин: берем миним. значение из дочер. вершин
 $F(b) = \max_{1 \leq i \leq 4} F(b, i)$ - т.е. запоминаем 1-ый уровень вершин: берем максим. значение из дочер. вершин

$v = \min_{b \in \{1, 2\}} F(b)$ - корень

т.е. $v = \min \{5, 3\} = 3$, $\boxed{v = 3}$

Опред. оптималь. стратегии 2-го игрока:

$$j^0 = j^0(b, i), \quad b^0$$

$$b^0 = \operatorname{Arg} \min_{b \in \{1, 2\}} F(b) = 2 \Rightarrow j^0 = j^0(2, i)$$

$$j^0(2, 1) = 3 \quad (\text{т.д. выбрать 4-м } a_{13} = 0)$$

$$j^0(2, 2) = 3 \quad (\text{т.д. выбрать 4-м } a_{23} = 2)$$

$$j^0(2, 3) = 2$$

$$j^0(2, 4) = 3$$

Опред. оптималь. стратегии 1-го игрока:

$$i^0 = i^0(b)$$

$$i^0(1) = 1 \quad (\text{т.д. выбрать } \max_{i \in I_1} \{5, 4, 1, 2\})$$

$$i^0(2) = 3 \quad (\text{т.д. выбрать } \max_{i \in I_2} \{0, 2, 3, 13\})$$

Ответ: $v = 3$ - значение игры

$i^0(1) = 1$
 $i^0(2) = 3$ } - оптималь. стратег. 1-го игрока

$b^0 = 2$
 $j^0(2, 1) = 3$
 $j^0(2, 2) = 3$
 $j^0(2, 3) = 2$
 $j^0(2, 4) = 3$ } - оптималь. стратег. 2-го игрока

Вариант 14

Задача 3

Найдите максимум и максимумную строку
и минимум и минимумную строку:

$$F(x, y) = -x^2 - 4xy - 3y^2 - y$$

$$X = [-1, 2], Y = [-1, 1]$$

$$x = \max_{-1 \leq x \leq 2} \min_{-1 \leq y \leq 1} F(x, y)$$

$$W(x) = \min_{-1 \leq y \leq 1} F(x, y) = F(x, y(x))$$

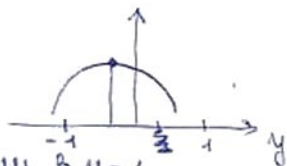
$F(x, y)$ — парабола отн. y , верш. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ минимум достигн. или в $y = -1$, или в $y = 1$

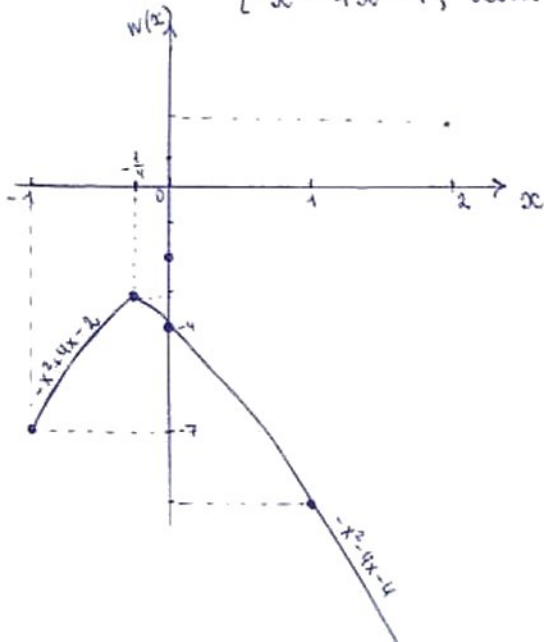
$$W(x) = \min \{ F(x, -1), F(x, 1) \} =$$
$$= \min \{ -x^2 + 4x - 2, -x^2 - 4x - 4 \}$$

$$-x^2 + 4x - 2 \leq -x^2 - 4x - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x \leq -2 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{4}$$



Тогда,
$$W(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 2, & \text{если } x \in [-1, -\frac{1}{4}] \\ -x^2 - 4x - 4, & \text{если } x \in [-\frac{1}{4}, 2] \end{cases}$$



$$-\frac{1}{16} - \frac{4}{4} - 2 = -3\frac{1}{16}$$

$$-\frac{4}{-2} = 2 \quad -4 + 8 - 2 = 2$$

$$-1 - 4 - 2 = -7$$

$$-1 - 4 - 4$$

$$x^0 = -\frac{1}{4}$$

$$\underline{v} = \max_{-1 \leq x \leq 2} W(x) = W(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 2 = -3\frac{1}{16}$$

$$\boxed{x^0 = -\frac{1}{4}} - \text{максимумная точка}$$

$$\boxed{\underline{v} = -3\frac{1}{16}} - \text{максимум}$$

Вариант 22

Задача 1

Найдите наименьший гарантируемый результат F_1 и все оптимальные стратегии игрока иерархической игры Γ_1 для биматричной игры Γ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \max_{1 \leq i \leq 5} \min_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$$Y(i) = \text{Arg} \max_{1 \leq j \leq 6} b_{ij}$$

$$W(i) = \min_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$$Y(1) = \{2, 3\} \leftarrow \text{в м. В, тем более ищем max эл-ты и записываем их номера}$$

$$Y(2) = \{1, 5, 6\}$$

$$Y(3) = \{2, 6\}$$

$$Y(4) = \{6\}$$

$$Y(5) = \{1, 5\}$$

$$W(1) = \min_{j \in Y(1)} a_{1j} = \min \{a_{12}^2, a_{13}^2\} = 2$$

$$W(2) = 0$$

$$W(3) = 1$$

$$W(4) = 1$$

$$W(5) = 0$$

$$\Rightarrow F_1 = \max_{1 \leq i \leq 5} W(i) = 2 \Rightarrow \underline{i^0 = 1} - \text{оптим. стратег.}$$

$$\underline{F_1 = 2} - \text{наим. гарант. рез.}$$

Вариант 22

Задача 2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 6 \\ 4 & 6 & 9 & 3 \\ 7 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Найдите решение в смеш. стратегиях

Строка доминирует над вып. мин. кол-вом. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ ее можно вычеркнуть

Столбец доминирует над вып. мин. кол-вом. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ его можно вычеркнуть

- 1) 1 строка $\leq$ 3 строка $\Rightarrow$ вычеркив. 1 строку
- 2) [рассм. оставшуюся матрицу, суммирование сохраним]
1 столбец $\geq$ 4 столбец $\Rightarrow$ вычерк. 1 столбец
- 3) [...] 4 строка $\leq$ 2 строка $\Rightarrow$ вычерк. 4 строку

Теперь рассм. матрицу:

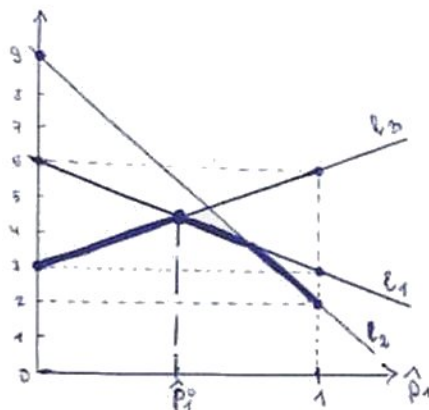
$$\hat{A} = \hat{A}_{\begin{smallmatrix} 1,2 \\ 3,4 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Рассм. прямые $l_j(\hat{p}_1) = \hat{a}_{1j} \cdot \hat{p}_1 + \hat{a}_{2j} \cdot (1 - \hat{p}_1) \Rightarrow$

$$l_1(\hat{p}_1) = 3\hat{p}_1 + 6(1 - \hat{p}_1) = -3\hat{p}_1 + 6$$

$$l_2(\hat{p}_1) = 2\hat{p}_1 + 9(1 - \hat{p}_1) = -7\hat{p}_1 + 9$$

$$l_3(\hat{p}_1) = 6\hat{p}_1 + 3(1 - \hat{p}_1) = 3\hat{p}_1 + 3$$



Строим нижнюю огибающую (—)

Находим ее точку макс:

$$\hat{p}_{01}^* = l_1 \cap l_3$$

$$-3\hat{p}_1 + 6 = 3\hat{p}_1 + 3$$

$$\Downarrow 6\hat{p}_1 = 3$$

$$\Downarrow \hat{p}_1^0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{p}^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \leftarrow \text{mo que u. } \hat{A}.$$

Maximizar $\hat{q}^0$:

$$k_{j1}\hat{q}^* + k_{j2}(1-\hat{q}^*) = 0$$

$$\hat{p}_1^0 = e_1 \cap e_3 \Rightarrow \begin{cases} j_1 = 1 \Rightarrow k_{j_1} = -3 \\ j_2 = 3 \Rightarrow k_{j_2} = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\hat{q}^* + 3(1-\hat{q}^*) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\hat{q}^* = 3 \Rightarrow \hat{q}^* = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{q}^0 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

Tercia: $\boxed{\hat{p}^0} = (0, \hat{p}_1^0, \hat{p}_2^0, 0) = \underline{(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)},$

$\boxed{\hat{q}^0} = (0, \hat{q}_1^0, \hat{q}_2^0, \hat{q}_3^0) = \underline{(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})},$

$$\boxed{v} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 p_i^0 a_{ij} q_j^0 = \sum_{i=1}^4 \left(p_i^0 a_{i2} \cdot \frac{1}{2} + p_i^0 a_{i4} \cdot \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} a_{22} + \frac{1}{4} a_{24} + \frac{1}{4} a_{32} + \frac{1}{4} a_{34} =$$

$$= \frac{1}{4} (3+6+6+3) = \boxed{\frac{9}{2}}$$

Вариант 22Задача 3

Найдите минимум и максимум функции
на прямоугольнике:

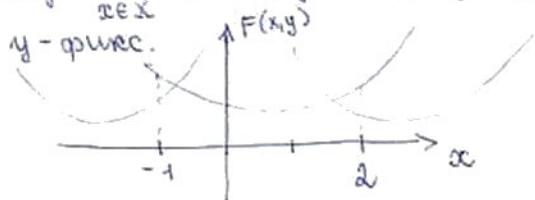
$$F(x, y) = 3x^2 - 6xy - y^2 - 2x + y$$

$$X = [-1, 2], \quad Y = [-1, 1]$$

$$\bar{v} = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y)$$

$y^0 \in Y$ - минимакс. значение, если $\sup_{x \in X} F(x, y^0) = \bar{v}$

$$M(y) = \sup_{x \in X} F(x, y) = F(x(y), y)$$



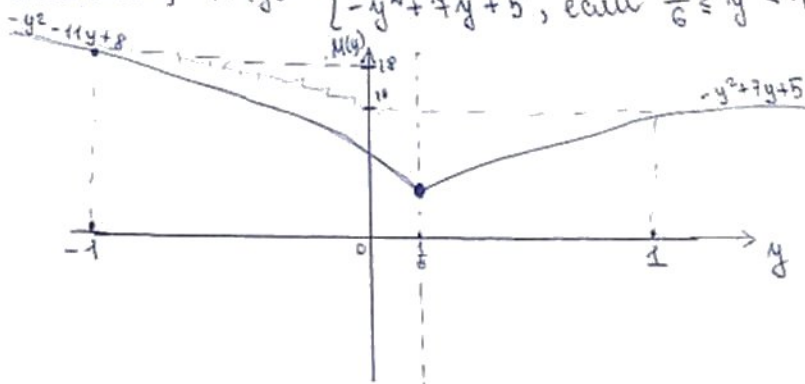
$$\begin{aligned} M(y) &= \max \{ F(-1, y); F(2, y) \} = \\ &= \max \{ -y^2 + 4y + 5; -y^2 - 11y + 8 \} \end{aligned}$$

$$-y^2 + 4y + 5 \leq -y^2 - 11y + 8$$

$$18y \leq 3$$

$$\Rightarrow y \leq \frac{1}{6}$$

$$\text{Значит, } M(y) = \begin{cases} -y^2 - 11y + 8, & \text{если } -1 \leq y < \frac{1}{6} \\ -y^2 + 4y + 5, & \text{если } \frac{1}{6} \leq y < 1 \end{cases}$$



$$\text{в т. } y = -1 : -y^2 - 11y + 8 = -1 + 11 + 8 = 18$$

$$\text{в т. } y = 1 : -y^2 + 4y + 5 = -1 + 4 + 5 = 11$$

$$\text{вершина } -y^2 - 11y + 8 : -\frac{-11}{2 \cdot (-1)} = -\frac{11}{2} = -5.5$$

$$\text{вершина } -y^2 + 4y + 5 : -\frac{4}{2 \cdot (-1)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{в т. } y = \frac{1}{6} : -\frac{1}{36} + \frac{4}{6} + 5 = 5 + \frac{41}{36} = \frac{180 + 41}{36} = \frac{221}{36} = 6\frac{5}{36}$$

$$M(y) \text{ на } [-1, 1] \text{ достиг. min в т. } y^0 = \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y^0 = \frac{1}{6}} - \text{минимакс. стратегия}$$

$$\boxed{V = 6\frac{5}{36}} - \text{минимакс}$$

Вариант 23

Задача 1

Найдем все равновесия по НМ.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Равнов. по НМ.: $(i^0, j^0): W'(i^0) = \max_{1 \leq i \leq 5} W'(i) = F'$

$$W'(i) = \max_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$$Y(i) = \text{Arg max}_{1 \leq j \leq 6} b_{ij}$$

$$i=1 \Rightarrow Y(1) = \{1, 3\} \leftarrow b_{11}, b_{13}$$

$$i=2 \Rightarrow Y(2) = \{4\} \leftarrow b_{24}$$

$$i=3 \Rightarrow Y(3) = \{6\} \leftarrow b_{36}$$

$$i=4 \Rightarrow Y(4) = \{1\} \leftarrow b_{41}$$

$$i=5 \Rightarrow Y(5) = \{1, 4, 6\} \leftarrow b_{51}, b_{54}, b_{56}$$

$$W'(1) = \max_{j \in \{1, 3\}} a_{1j} = \max\{1, 4\} = 4$$

$$W'(2) = 0 \quad (= a_{24})$$

$$W'(3) = 0 \quad (= a_{36})$$

$$W'(4) = 1 \quad (= a_{41})$$

$$W'(5) = \max\{ \underset{a_{51}}{1}, \underset{a_{54}}{2}, \underset{a_{56}}{1} \} = 2$$

∇

$$W'(i^0) = \max\{4, 0, 0, 1, 2\} = 4$$

∇

Равнов. по НМ.: $(i^0, j^0) = (1, 3)$

Вариант 23

Задача 2

Найдите решение в смешанных стратегиях матричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

a доминирует b , если $a_i \geq b_i$

Строка доминируется нез выиг. или комбинацией стр.,
то ее можно вычеркнуть

Столбец доминирует нез выиг. или комбинацией стр.,
то его можно вычеркнуть.

Считаю, что здесь надо найти хотя бы 1 смеш. смеш. стратегию.
(Может, надо все?)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1) 1 строка доминируется ($<$) $\frac{1}{2}$ (2 стр.) + $\frac{1}{2}$ (4 стр.) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ вычерк. 1 строку

2) [теперь рассм. оставшуюся матрицу, но цинично
для удобства сохраним прежнюю]
1 столбец доминирует ($\geq$) 3 столбец $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ вычерк. 1 столбец

3) [...] 4 столбец доминирует ($\geq$) 2 столбец (например) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ вычерк. 4 столбец

4) [...] 2 строка доминируется ($\leq$) $\frac{1}{2}$ (3 стр.) + $\frac{1}{2}$ (4 стр.) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ вычерк. 2 строку



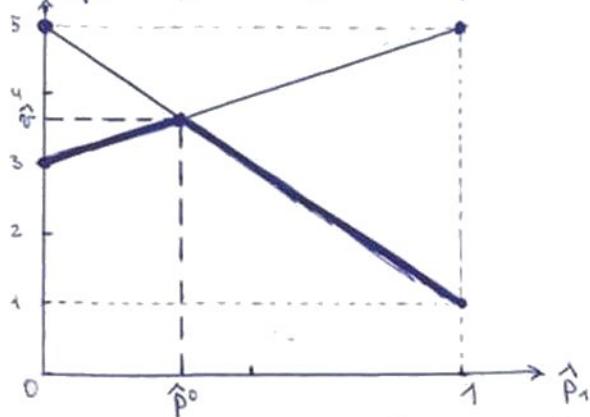
Теперь рассм. матрицу $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

$$\hat{v} = \max_{0 \leq p \leq 1} \min_{1 \leq j \leq 2} [\hat{a}_{1j} \hat{p}_1 + \hat{a}_{2j} (1 - \hat{p}_1)]$$

Рассм. функции $l_j(\hat{p}) = \hat{a}_{1j} \hat{p}_1 + \hat{a}_{2j} (1 - \hat{p}_1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow l_1(\hat{p}) = \hat{p}_1 + 5(1 - \hat{p}_1) = 5 - 4\hat{p}_1$$

$$l_2(\hat{p}_1) = 5\hat{p}_1 + 3(1 - \hat{p}_1) = 3 + 2\hat{p}_1$$



Строим искомую ожидающую (см. рис. - "—") $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ находим точку max:

$$5 - 4\hat{p}_1 = 3 + 2\hat{p}_1$$

$$6\hat{p}_1 = 2 \Rightarrow \hat{p}_1^0 = \frac{1}{3} \Rightarrow \hat{p}^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$\leftarrow$ это guess и. $\hat{A}$

Находим $\hat{q}^0$:

$$K_{j1} \hat{q}^* + K_{j2} (1 - \hat{q}^*) = 0$$

$$\hat{p}_1^0 = l_1 \cap l_2 \Rightarrow \begin{cases} j_1 = 1 \Rightarrow K_{j1} = -4 \\ j_2 = 2 \Rightarrow K_{j2} = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4\hat{q}^* + 2(1 - \hat{q}^*) = 0 \Rightarrow 6\hat{q}^* = 2 \Rightarrow \hat{q}^* = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{q}^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \leftarrow \text{это guess и. } \hat{A}$$

Тогда: $\underline{p}^0 = (0, 0, \hat{p}_1^0, \hat{p}_2^0) = (0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

$\underline{q}^0 = (0, \hat{q}_1^0, \hat{q}_2^0, 0) = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$

$$v = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 p_i^0 a_{ij} q_j^0 = \sum_{i=1}^4 (p_i^0 a_{i2} \cdot \frac{1}{3} + p_i^0 a_{i3} \cdot \frac{2}{3}) = \frac{1}{9} a_{32} + \frac{2}{9} a_{33} + \frac{2}{9} a_{42} + \frac{4}{9} a_{43} =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot 1 + \frac{2}{9} \cdot 5 + \frac{2}{9} \cdot 5 + \frac{4}{9} \cdot 3 = \frac{1}{9} + \frac{10}{9} + \frac{10}{9} + \frac{12}{9} = \frac{33}{9} = \frac{11}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{11}{3}$$

Вариант 23

Задача 3

Используя соображения доминирования, найдите ситуации равновесия в следующих стратегиях:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 1 & 7 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & 3 \\ 7 & 3 & 3 & 6 \\ 3 & 7 & 7 & 3 \\ 6 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Если в A строке строго доминируется выш. или комбинацией остальных, то она входит с нулевой вер. в опт. смеш. страт. того игрока (т.е. ее можно вычеркнуть)

Если в B столбце строго доминируется выш. или комб. ост., то он входит с 0 вер. в опт. смеш. страт. того игр. (т.е. его можно вычеркнуть)

$$1) \text{ в } A: 1 \text{ строка} < \frac{1}{2} (2 \text{ стр.}) + \frac{1}{2} (3 \text{ стр.}) \Rightarrow$$

(3 2 5 5) (4 2.5 6.5 6.5)

$\Rightarrow$ вычеркив. 1 строку и в A, и в B

$$2) \text{ в } A: 4 \text{ строка} < \frac{1}{2} (2 \text{ стр.}) + \frac{1}{2} (3 \text{ стр.}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ вычеркив. 4 строку и в A, и в B.

Теперь рассм. такие матрицы:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 & 6 \\ 3 & 7 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Строим прямые $l_i(\hat{p}_1) = \hat{p}_1 \cdot \hat{b}_{i1} + (1 - \hat{p}_1) \cdot \hat{b}_{i2}$:

$$l_1(\hat{p}_1) = 4\hat{p}_1 + 3(1 - \hat{p}_1) = 4\hat{p}_1 + 3$$

$$l_2(\hat{p}_1) = 3\hat{p}_1 + 7(1 - \hat{p}_1) = -4\hat{p}_1 + 7$$

$$l_3(\hat{p}_1) = 3\hat{p}_1 + 7(1 - \hat{p}_1) = -4\hat{p}_1 + 7$$

$$l_4(\hat{p}_1) = 6\hat{p}_1 + 3(1 - \hat{p}_1) = 3\hat{p}_1 + 3$$

Рассм. верхнюю огибающую и точки излома (—)

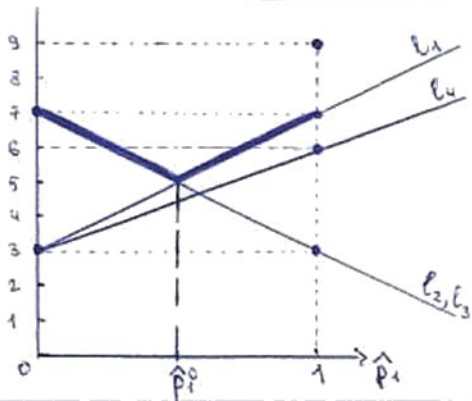
т.ч. излома $\hat{p}_1^i = l_1 \cap l_2, l_1 \cap l_3$
($l_2 = l_3$ же)

Найдем $\hat{p}_1^i$:

$$4\hat{p}_1 + 3 = -4\hat{p}_1 + 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\hat{p}_1 = 4 \Rightarrow \hat{p}_1^0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{p}^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

это гл. и. $\hat{A}$



здесь не терпели см. равнов. при использовании доминирования можно вычеркнуть все 3 и 4 строки, но не забудем так!

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{q}^* & 1-\hat{q}^* & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$\ell_1 \cap \ell_2 \Rightarrow$ рассм. 1 и 2 столбцы

по строкам:

$$\begin{cases} 2\hat{q}^* + 4(1-\hat{q}^*) = \hat{v}_1 \\ 6\hat{q}^* + 1-\hat{q}^* = \hat{v}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\hat{q}^* + 4(1-\hat{q}^*) = 6\hat{q}^* + 1 - \hat{q}^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\hat{q}^* + 4 = 5\hat{q}^* + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7\hat{q}^* = 3 \Rightarrow \hat{q}^* = \frac{3}{7} \Rightarrow \hat{q}^0 = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0, 0\right) = q^0$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{q}^* & 0 & 1-\hat{q}^* & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$\ell_1 \cap \ell_3 \Rightarrow$ рассм. 1 и 3 столбцы

по строкам:

$$\begin{cases} 2\hat{q}^* + 6(1-\hat{q}^*) = \hat{v}_1 \\ 6\hat{q}^* + 1-\hat{q}^* = \hat{v}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\hat{q}^* + 6(1-\hat{q}^*) = 6\hat{q}^* + 1 - \hat{q}^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4\hat{q}^* + 6 = -\hat{q}^* + 1 \Rightarrow 3\hat{q}^* = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{q}^* < 0 \Rightarrow \text{это точка не подходит}$$

[т.е. если бы мы вычеркнули еще 2 и 4 столбцы, то не нашли бы естественного равновесия?!]

$$\boxed{p^0} = (0, \hat{p}_1, \hat{p}_2, 0) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),$$

$$\boxed{q^0} = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0, 0\right),$$

$\nwarrow$ е.р.
 $\swarrow$ е.р.

[этот алгоритм вообще-то не находит все е.р., но требуют ли этого в этом задании?]

Вариант 24Задача 1

Найдите нижнее и верхнее значение игры, все максимальные и минимаксные стратегии, а также все седловые точки (если $\exists$) матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 6 & 9 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 9 & 0 & 8 & 1 & 9 & 2 & 7 \\ 5 & 0 & 8 & 0 & 8 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 9 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$W(i) = \min_{1 \leq j \leq 7} a_{ij} \Rightarrow W(i) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\underline{v}} = \max_{1 \leq i \leq 5} W(i) = \boxed{4} \Rightarrow$$

↑
нижн. знач. игры

$$\Rightarrow \boxed{X^0 = \{1\}} \leftarrow \text{максим. страт. : } x^0 = 1$$

↑
где достиж. $\max W(i)$

$$M(j) = \max_{1 \leq i \leq 5} a_{ij} \Rightarrow M(j) = (9 \ 5 \ 8 \ 9 \ 9 \ 6 \ 7) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{v}} = \min_{1 \leq j \leq 7} M(j) = \boxed{5} \leftarrow \text{верхн. знач. игры} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{Y^0 = \{2\}} \leftarrow \text{минимакс. страт. : } y^0 = 2$$

$$\underline{v} = 4 < \bar{v} = 5 \Rightarrow \underline{\text{нет седловых точек}}$$

Вариант 24

Задача 2

Найдите все ситуации равновесия игры на непрерывных:

$$F(x, y) = -x^2 + 2xy - 3y^2 - x - y$$

$$G(x, y) = -x^2 - 4xy - 3y^2 + 2x - y$$

$$X = [-1, 2], \quad Y = [-1, 1]$$

$$\left. \begin{aligned} F'_x &= -2x + 2y - 1 \Rightarrow F''_{xx} = -2 < 0 \Rightarrow F \text{ — строго вогн. по } x \\ G'_y &= -4x - 6y - 1 \Rightarrow G''_{yy} = -6 < 0 \Rightarrow G \text{ — строго вогн. по } y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \exists \text{ c.p.}$$

F, G — строго вогн. $\Rightarrow$ наша наша. ответов состоит из един. пары

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x(y): \max_{-1 \leq x \leq 2} F(x, y) = F(x(y), y) \\ y(x): \max_{-1 \leq y \leq 1} G(x, y) = G(x, y(x)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(y) = x \\ y(x) = y \end{cases} \Rightarrow (x^0, y^0) \text{ — c.p.}$$

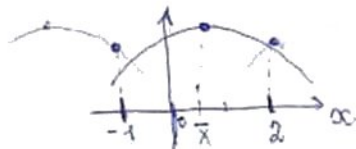
Построим $x(y)$:

F — вогн. по $x \Rightarrow$

$$\Rightarrow F'_x = -2x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow \bar{x} = y - \frac{1}{2}$$

$$\bar{x} \in [-1, 2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 \leq y - \frac{1}{2} \leq 2 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{5}{2}$$



Ф-ия наша. ответа где то широка:

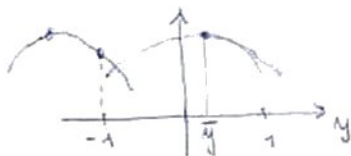
$$x(y) = \begin{cases} -1, & \text{если } -1 \leq y < -\frac{1}{2} \text{ (т.е. } \bar{x} < -1) \\ y - \frac{1}{2}, & \text{если } -\frac{1}{2} \leq y \leq 1 \text{ (т.е. } -1 \leq \bar{x} \leq 2) \end{cases}$$

Построим $y(x)$:

G — вогн. по $y \Rightarrow$

$$\Rightarrow G'_y = -4x - 6y - 1 = 0 \Rightarrow \bar{y} = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$$

$$\bar{y} \in [-1, 1] \Rightarrow -1 \leq -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6} \leq 1 \Rightarrow$$



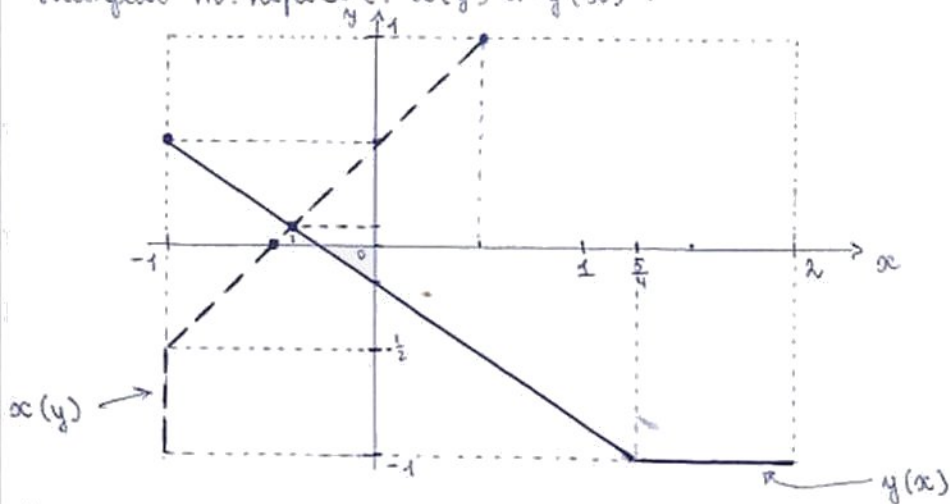
$$\Rightarrow -\frac{5}{6} \leq -\frac{1}{3}x \leq \frac{7}{6} \Rightarrow -\frac{7}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}$$

$$\bar{y} < -1 \Rightarrow -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6} < -1 \stackrel{<-1}{\Rightarrow} -\frac{2}{3}x < -\frac{5}{6} \Rightarrow x > \frac{5}{4}$$

Ф-ие найм. ответа где лев широк:

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}, & \text{если } -1 \leq x \leq \frac{5}{4} \\ -1, & \text{если } \frac{5}{4} < x \leq 2 \end{cases}$$

Найдем т. пересеч. $x(y)$ и $y(x)$:



$$\left(\begin{aligned} y(-1) &= \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \\ y\left(\frac{5}{4}\right) &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} - \frac{1}{6} = -\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = -1 \end{aligned} \right)$$

т. пересеч.:

$$\begin{cases} y - \frac{1}{2} = x \\ -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ y = \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$\underbrace{\left(x^0, y^0 \right)}_{\text{ситуация равновесия}} = \left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{10} \right) - \text{ситуация равновесия}$$

Вариант 24Задача 3

Решите игру Γ_2 для симметричной игры Γ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G_2 = \max_{1 \leq j \leq 5} \min_{1 \leq i \leq 5} b_{ij}$$

$$\min_{1 \leq i \leq 5} b_{ij} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \Rightarrow G_2 = 0 \Rightarrow E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$D = \{(i, j) \mid b_{ij} > \underbrace{G_2}_0\} \rightarrow \text{см. м. В - м. во } D \text{ обведено}$$

$$K = \max_{(i, j) \in D} a_{ij} = \underline{6}$$

Обведем м. во в м. А, соотв. $(i, j) \in D$

$$M = \min_{j \in E} \max_{1 \leq i \leq 5} a_{ij} = \min_{1 \leq j \leq 5} \max_{1 \leq i \leq 5} a_{ij}$$

$$\max_{1 \leq i \leq 5} a_{ij} = (5 \ 4 \ 6 \ 6 \ 6) \Rightarrow \underline{M = 4}$$

$$4 = M < K = 6$$

$$\begin{cases} f^E(y) = \begin{cases} x^E, & \text{если } y = y^E \leftarrow \text{т.е. } G(x^E, y^E) > G_2 \\ f''(y), & \text{если } y \neq y^E \leftarrow \text{т.е. } G(f''(y), y) \leq G_2 \end{cases} \\ (x^E, y^E) \in D \end{cases}$$

наим. гарант. выигрыш. 1-го игрока:

$$F_2 = \max[K, M] = 6$$

Пусть, F_2 реализуется в a_{13}

$$f^E(j) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = 3 \\ 4, & \text{если } j = 1 \\ 3, & \text{если } j = 2 \\ 1, & \text{если } j = 4 \\ 2, & \text{если } j = 5 \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow \text{номер } i \\ \text{наим. из-за} \\ \text{в соотв. столбце} \\ \text{м. В} \end{matrix}$$

Вариант 36Задача 1

Найдите миним. и максим. значение игры, все максимальные и минимаксные стратегии, а также все седловые точки (если $\exists$) матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 8 & 1 & 8 & 8 & 3 \\ 4 & 9 & 9 & 5 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 9 & 4 & 4 & 8 & 9 & 9 \\ 8 & 9 & 2 & 6 & 5 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$W(i) = \min_{1 \leq j \leq 7} a_{ij} \Rightarrow W(i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v} = \max_{1 \leq i \leq 5} W(i) = \underline{4} \quad - \text{миним. знач. игры} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X^0 = \{4\} \Rightarrow \boxed{x^0 = 4} \quad - \text{максим. стратегия, где достиж. } \max W(i)$$

$$M(j) = \max_{1 \leq i \leq 5} a_{ij} \Rightarrow M(j) = (9 \ 9 \ 9 \ 4 \ 8 \ 9 \ 9)$$

$$\overline{v} = \min_{1 \leq j \leq 7} M(j) = \overline{4} \quad - \text{максим. знач. игры} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y^0 = \{4\} \Rightarrow \boxed{y^0 = 4} \quad - \text{минимакс. стратегия}$$

$$\underline{v} = 4 < 4 = \overline{v} \Rightarrow \text{нет седловых точек}$$

Вариант 38

Задача 3

Решите игру Γ_2 для симметричной игры Γ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 6 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 0 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 7 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G_2 = \max_{1 \leq j \leq 5} \min_{1 \leq i \leq 5} b_{ij}$$

$$\min_{1 \leq i \leq 5} b_{ij} = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0) \Rightarrow G_2 = 1 \Rightarrow E = \{3\}$$

$D = \{(i,j) \mid b_{ij} > G_2\} \rightarrow$ м. и. В - м. во D обведены

Обведем м. во в м. А, соотв. $(i,j) \in D \Rightarrow$

$$K = \max_{(i,j) \in D} a_{ij} = 8$$

$$M = \min_{j \in E} \max_{1 \leq i \leq 5} a_{ij} = \max_{1 \leq i \leq 5} a_{i3} = 7$$

$$7 = M < K = 8$$

$$f^E(y) = \begin{cases} x^E, & \text{если } y = y^E \leftarrow \text{т.е. } G(x^E, y^E) > G_2 \\ f^H(y), & \text{если } y \neq y^E \leftarrow \text{т.е. } G(f^H(y), y) \leq G_2 \end{cases}$$

$(x^E, y^E) \in D$

Нам. гарант. выигрыш того игрока:

$$F_2 = \max[K, M] = 8$$

Пусть, F_2 реализуется в a_{33}

$$f^E(j) = \begin{cases} 3, & \text{если } j=2 \\ 1, & \text{если } j=1 \\ 5, & \text{если } j=3 \\ 2, & \text{если } j=4 \\ 4, & \text{если } j=5 \end{cases}$$

номер i
наим. из-ма
в соотв. строке
матрицы В

Вариант 36

Задача 2

Найдите все ситуации равновесия игры на прямоугольнике:

$$F(x, y) = -3x^2 + 3xy - 2y^2 + 2x$$

$$G(x, y) = -2x^2 - 5xy - 3y^2 - y$$

$$X = [-1, 1], Y = [-1, 1]$$

$$\left. \begin{aligned} F'_x &= -6x + 3y + 2 \Rightarrow F''_{xx} = -6 < 0 \Rightarrow F \text{ — строго вогн. по } x \\ G'_y &= -5x - 6y - 1 \Rightarrow G''_{yy} = -6 < 0 \Rightarrow G \text{ — строго вогн. по } y \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists \text{ е.р.}$

F, G — строго вогн. $\Rightarrow$ им-ва наш. ответов состоит из един. эл-тов $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(y): \max_{-1 \leq x \leq 1} F(x, y) = F(x(y), y) \\ y(x): \max_{-1 \leq y \leq 1} G(x, y) = G(x, y(x)) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(y) = x \\ y(x) = y \end{cases} \Rightarrow (x^0, y^0) \text{ — е.р.}$$

Построим $x(y)$:

F — вогн. по $x \Rightarrow$

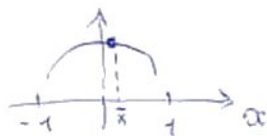
$$\Rightarrow F'_x = -6x + 3y + 2 = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}$$

$$\bar{x} \in [-1, 1] \Rightarrow -1 \leq \frac{1}{2}y + \frac{1}{3} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{3} \leq \frac{1}{2}y \leq \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{8}{3} \leq y \leq \frac{4}{3}$$

$y \in [-1, 1] \Rightarrow$ ф-не наш. ответов 1-ого типа:

$$\boxed{x(y) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}}$$

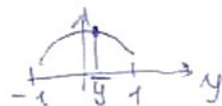


Построим $y(x)$:

G — вогн. по $y \Rightarrow$

$$\Rightarrow G'_y = -5x - 6y - 1 = 0 \Rightarrow \bar{y} = -\frac{5x+1}{6}$$

$$\bar{y} \in [-1, 1] \Rightarrow -1 \leq -\frac{5x+1}{6} \leq 1 \Rightarrow$$



$$\Rightarrow -6 \leq -5x - 1 \leq 6 \Rightarrow -5 \leq -5x \leq 7 \Rightarrow -\frac{7}{5} \leq x \leq 1$$

$x \in [-1, 1] \Rightarrow \varphi$ -ие наш. ответов 2-го уровня:

$$\underline{y(x) = -\frac{5x+1}{6}}$$

Найдем т. пересек. $x(y)$ и $y(x)$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{1}{3} = x \\ -\frac{5x+1}{6} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{5x+1}{6} \\ 3 \cdot \left(-\frac{5x+1}{6}\right) + 2 = 6x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{5x+1}{6} \\ -5x-1+4 = 12x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{17} \\ y = -\frac{1}{6} \left(\frac{15}{17} + 1 \right) = -\frac{32^{10}}{17 \cdot 6} = -\frac{16}{51} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{(x^0, y^0) = \left(\frac{3}{17}, -\frac{16}{51} \right)} \quad - \text{ единственное равновесие}$$

Bagara 1

Найдите наилучший гарантированный резуль-
тат F_1 и все оптимальные стратегии 1-го
и 2-го игрока иерархической игры Γ_1 для матрич-
ной игры Γ :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \max_{1 \leq i \leq 5} \min_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$$y(i) = \text{Arg max}_{1 \leq j \leq 6} b_{ij}$$

$$W(i) = \min_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$$\underline{Y}(1) = \{6\} \leftarrow b_{16} = 4$$

$$Y(2) = \{2\} \leftarrow b_{22} = 4$$

$$Y(3) = \{1, 2, 4, 6\} \text{ and } b_{31} = b_{32} = b_{34} = b_{36} = 4$$

$$Y(4) = \{3\} \quad \& \quad b_{43} = 3$$

$$Y(5) = \{2\} \leftarrow b_{52} = 4$$

$$\Gamma W(1) = a_{16} = 2$$

$$W(2) = a_{22} = 0$$

$$W(3) = \min \{ \underset{\text{"1"}}{a_{31}}, \underset{\text{"0"}}{a_{32}}, \underset{\text{"2"}}{a_{34}}, \underset{\text{"2"}}{a_{36}} \} = 0$$

$$W(4) = a_{43} = 1$$

$$W(5) = a_{52} = 4$$

$$F_1 = \max_{1 \leq i \leq 5} W(i) = 4 \Rightarrow \boxed{i^0 = 5} - \text{он мѣстѣ.}$$

$F_1 = 4$ - наим. парамет. выигрыш
1-ого игрока

Вариант 38

Задача 3

Найдите минимакс и минимаксную стратегию игры на прямоугольнике:

$$F(x, y) = 3x^2 + 5xy - y^2 - 2x - y$$

$$X = [-1, 2], \quad Y = [-2, 1]$$

$$\underline{v} = \inf_{-2 \leq y \leq 1} \sup_{-1 \leq x \leq 2} F(x, y)$$

$$M(y) = \sup_{-1 \leq x \leq 2} F(x, y) = F(x(y), y)$$

Найдем $M(y)$:

$$F(x, y) = 3x^2 + (5y - 2)x + (-y^2 - y)$$

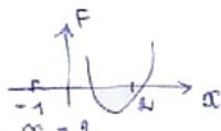
$\Rightarrow$ максимум достигн. при $x = -1$ или $x = 2$

$$M(y) = \max \{ F(-1, y), F(2, y) \} =$$

$$= \max \{ -y^2 - 6y + 5, -y^2 + 9y + 8 \}$$

$$-y^2 - 6y + 5 < -y^2 + 9y + 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15y > -3 \Rightarrow y > -\frac{1}{5}$$

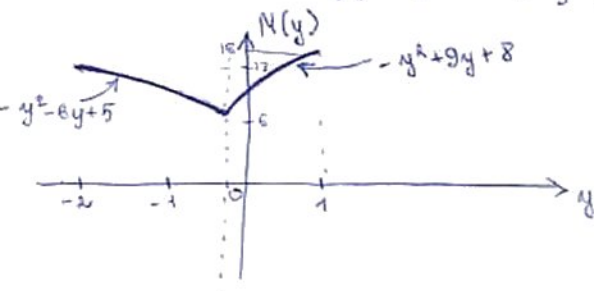


$$M(y) = \begin{cases} -y^2 - 6y + 5, & \text{если } -2 \leq y \leq -\frac{1}{5} \\ -y^2 + 9y + 8, & \text{если } -\frac{1}{5} < y \leq 1 \end{cases}$$

$$-(-2)^2 - 6 \cdot (-2) + 5 = -4 + 12 + 5 = 13, \quad -\frac{6}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot (-1)} = -3$$

$$-(-1)^2 + 9 + 8 = 9 + 8 - 1 = 16, \quad -\frac{6}{2a} = -\frac{9}{2 \cdot (-1)} = 4.5$$

$$-(-\frac{1}{5})^2 - 6 \cdot (-\frac{1}{5}) + 5 = -\frac{1}{25} + \frac{6}{5} + 5 = 6 + \frac{1}{5} - \frac{1}{25} = 6\frac{4}{25}$$



Минимум $M(y)$ достигн. в т. $y = -\frac{1}{5} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{y^0 = -\frac{1}{5}} \text{ - минимакс. стратегия}$$

$$\boxed{M(-\frac{1}{5}) = 6\frac{4}{25}} \text{ - минимакс}$$

Вариант 38

Задача 2

Найдите решение в смешанных стратегиях матричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Строка доминируется пер. вып. лм. колм. $\Rightarrow$ ее можно вычерк.
Столбец доминирует пер. вып. лм. колм. $\Rightarrow$ его можно вычерк.

- 1) 3 стр. $\leq$ 2 стр. $\Rightarrow$ вычерк. 3 строку
- 2) 4 стр. $\leq$ 1 стр. $\Rightarrow$ вычерк. 4 строку
- 3) 4 столб. $\geq$ 1 столб. $\Rightarrow$ вычерк. 4 столбец

Теперь рассм. матрицу:

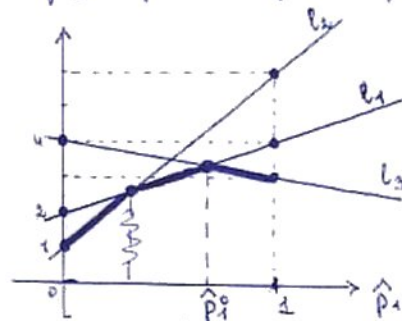
$$\hat{A} = \hat{A}_{1-3, 2-4} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Рассм. линейные $l_j(\hat{p}_1) = \hat{a}_{1j} \cdot \hat{p}_1 + \hat{a}_{2j} \cdot (1 - \hat{p}_1)$:

$$l_1(\hat{p}_1) = 4\hat{p}_1 + 2(1 - \hat{p}_1) = 2\hat{p}_1 + 2$$

$$l_2(\hat{p}_1) = 6\hat{p}_1 + 1(1 - \hat{p}_1) = 5\hat{p}_1 + 1$$

$$l_3(\hat{p}_1) = 3\hat{p}_1 + 4(1 - \hat{p}_1) = -\hat{p}_1 + 4$$



строим искомую огибающую. Иском. ее макс:

$$\hat{p}_1^0 = l_1 \cap l_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\hat{p}_1 + 2 = -\hat{p}_1 + 4 \Rightarrow 3\hat{p}_1 = 2$$

$$\Rightarrow \hat{p}_1^0 = \frac{2}{3} \Rightarrow \hat{p}^0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

Maxogum $\hat{q}^0$:

$$K_{j1} \hat{q}^* + K_{j2} (1 - \hat{q}^*) = 0$$

$$\hat{p}_i^0 = \ell_1 \cap \ell_3 \Rightarrow \begin{cases} j_1 = 1 \Rightarrow K_{j1} = 2 \\ j_2 = 3 \Rightarrow K_{j2} = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\hat{q}^* - (1 - \hat{q}^*) = 0 \Rightarrow 3\hat{q}^* = 1 \Rightarrow \hat{q}^* = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{q}^0 = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)},$$

$$\text{Terga, } \underline{p^0} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right) = (\hat{p}_1^0, \hat{p}_2^0, 0, 0)$$

$$\underline{q^0} = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0\right) = (\hat{q}_1^0, \hat{q}_2^0, \hat{q}_3^0, 0)$$

$$\begin{aligned} \underline{v} &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 p_i^0 \cdot a_{ij} \cdot q_j^0 = \sum_{i=1}^4 (p_i^0 \cdot a_{i1} \cdot \frac{1}{3} + p_i^0 \cdot a_{i3} \cdot \frac{2}{3}) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot a_{11} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot a_{13} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot a_{21} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot a_{23} = \\ &= \frac{2}{9} \cdot 4 + \frac{4}{9} \cdot 3 + \frac{1}{9} \cdot 2 + \frac{2}{9} \cdot 4 = \\ &= \frac{1}{9} (8 + 12 + 2 + 8) = \frac{30}{9} = \frac{10}{3} = \underline{\underline{3\frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

Jawab: $p^0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right)$
 $q^0 = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0\right)$
 $v = 3\frac{1}{3}$